第 8 講　三角関数のグラフ，方程式・不等式

PART1　三角関数のグラフ

1　[1]　関数 $y=3\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ の周期を求め，そのグラフをかけ。

[2]　方程式 $\sin\left(2x-\frac{2}{3}\pi\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ が $0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲にもつ解の個数をグラフを用いて求めよ。

Point Pickup

[1]　$y=a\sin\theta$ $(a>0)$ のグラフ … $y=\sin\theta$ のグラフを y 軸方向に a 倍したもの

$y=\sin k\theta$ $(k>0)$ のグラフ … $y=\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\frac{1}{k}$ 倍したもの

$y=\sin(\theta-p)$ のグラフ … $y=\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に p だけ平行移動したもの

[2]　三角関数を含む方程式 $\sin\theta=t$ の解 θ の個数は，$y=\sin\theta$ のグラフと直線 $y=t$ の共有点の個数を考えるとよい。

第 8 講　PART1　確認問題

1　関数 $y=2\sin\left(\dfrac{1}{2}\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$ の周期を求め，グラフをかけ。

周期は [ア]

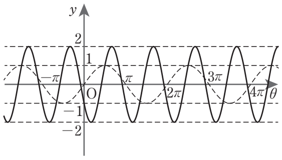
グラフは，[イ] の実線部分。ただし，選択肢の各図において，$y=\sin\theta$ のグラフを破線で示している。

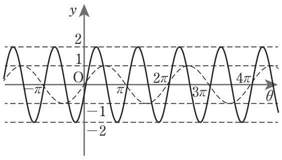
[[ア] の選択肢]

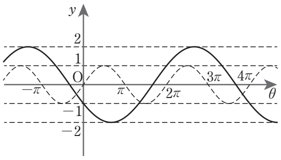
①　$\dfrac{\pi}{6}$　　②　$\dfrac{\pi}{4}$　　③　$\dfrac{\pi}{2}$　　④　$\dfrac{2}{3}\pi$　　⑤　π

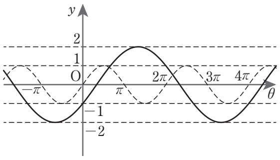
⑥　$\dfrac{3}{2}\pi$　　⑦　2π　　⑧　3π　　⑨　4π

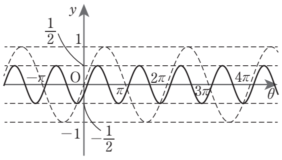
[[イ] の選択肢]

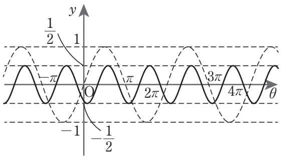
①


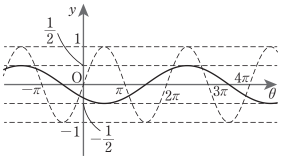
②


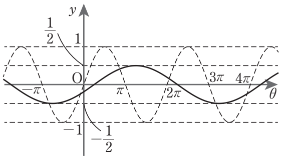
③


④


⑤


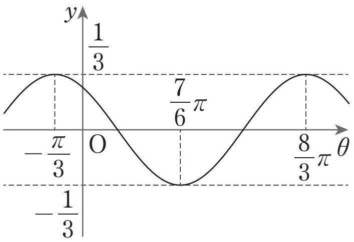
⑥


⑦


⑧


2 次の関数①～⑥のうち，そのグラフが下図のようになるものを 1 つ選べ。

ウ



① $y=\frac{1}{3}\cos\left(\frac{2}{3}\theta-\frac{2}{9}\pi\right)$　② $y=\frac{1}{3}\cos\left(\frac{2}{3}\theta+\frac{2}{9}\pi\right)$

③ $y=\frac{1}{3}\cos\left(\frac{3}{2}\theta-\frac{\pi}{2}\right)$　④ $y=\frac{1}{3}\cos\left(\frac{3}{2}\theta+\frac{\pi}{2}\right)$

⑤ $y=3\cos\left(\frac{3}{2}\theta-\frac{\pi}{2}\right)$　⑥ $y=3\cos\left(\frac{2}{3}\theta+\frac{2}{9}\pi\right)$

3 方程式 $\cos\left(3x+\frac{3}{4}\pi\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ が $0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲にもつ解の個数を，グラフを用いて求めよ。

エ 個

[MEMO]

第 8 講　三角関数のグラフ，方程式・不等式

PART1　三角関数のグラフ

1　［1］　関数 $y=3\cos\left(2\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$ の周期を求め，そのグラフをかけ。

［2］　方程式 $\sin\left(2x-\dfrac{2}{3}\pi\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ が $0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲にもつ解の個数をグラフを用いて求めよ。

［1］　$y=3\cos\left(2\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=3\cos 2\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$

この関数のグラフは，$y=\cos\theta$ のグラフを

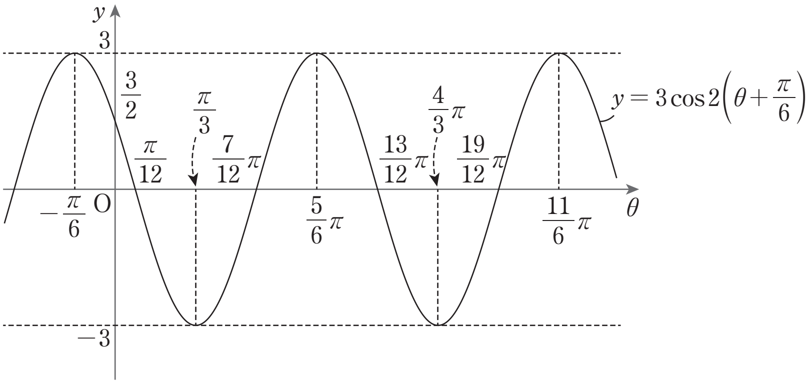
(Ⅰ)　y 軸方向に 3 倍に拡大

(Ⅱ)　θ 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍に縮小

(Ⅲ)　θ 軸方向に $-\dfrac{\pi}{6}$ だけ平行移動

したものであり，周期は $2\pi\cdot\dfrac{1}{2}=\pi$ である。

グラフは下図。

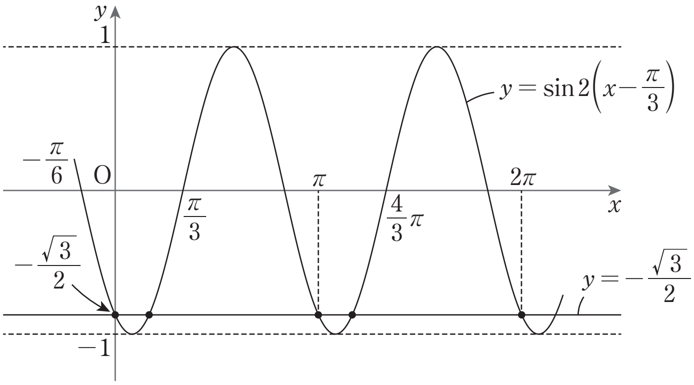


［2］　$y=\sin\left(2x-\frac{2}{3}\pi\right)=\sin 2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

この関数のグラフは下図。

このグラフと直線 $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ の共有点のうち，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲にあるものの個数が求める解の個数である。

よって，解の個数は５個



第 8 講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：⑨，イ：④

[解説]

$$y=2\sin\left(\frac{1}{2}\theta-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\frac{1}{2}\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$$ [A]

この関数のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを

(Ⅰ)　y 軸方向に 2 倍に拡大

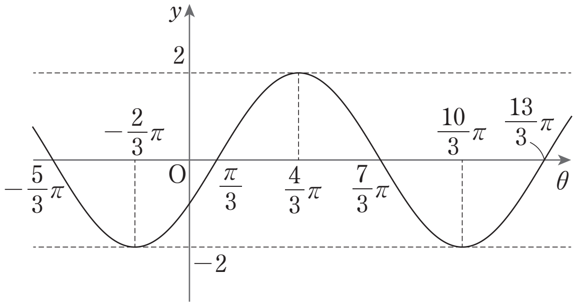
(Ⅱ)　θ 軸方向に 2 倍に拡大

(Ⅲ)　θ 軸方向に $\frac{\pi}{3}$ だけ平行移動

したものであり，周期は

$$2\pi\div\frac{1}{2}=4\pi$$ [B]

グラフは次図のようになる。



[A]　グラフの平行移動と拡大・縮小

関数 $y=\sin\theta$ のグラフに対し，

$y=a\sin\theta$ のグラフ $(a>0)$
→ y 軸方向に a 倍に拡大・縮小

$y=\sin k\theta$ のグラフ $(k>0)$
→ θ 軸方向に $\frac{1}{k}$ 倍に拡大・縮小

$y=\sin(\theta-p)$ のグラフ
→ θ 軸方向に p だけ平行移動

[B]　三角関数の周期

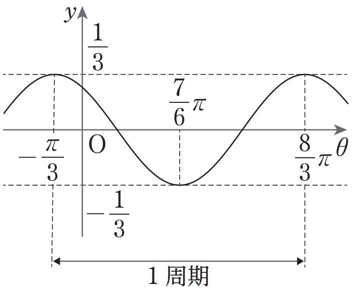
$y=\sin k\theta$ の周期は $\frac{2\pi}{|k|}$

$y=\cos k\theta$ の周期は $\frac{2\pi}{|k|}$

$y=\tan k\theta$ の周期は $\frac{\pi}{|k|}$

2 [正解] ウ：②

[解説]



求める関数を

$$y = a\cos k(\theta - p)\quad (a > 0,\ k > 0)$$ [A]

とする。グラフより，この関数の

最大値は $\dfrac{1}{3}$　　最小値は $-\dfrac{1}{3}$

であるから　$a = \dfrac{1}{3}$

また，この関数の周期は

$$\frac{8}{3}\pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = 3\pi$$

であるから　$\dfrac{2\pi}{|k|} = 3\pi$　　よって　$|k| = \dfrac{2}{3}$ [B]

$k > 0$ より　$k = \dfrac{2}{3}$

さらに，与えられたグラフは $y = \dfrac{1}{3}\cos\dfrac{2}{3}\theta$ のグラフを θ 軸方向に $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ平行移動したものであるから

$$y = \frac{1}{3}\cos\frac{2}{3}\left\{\theta - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\} = \frac{1}{3}\cos\frac{2}{3}\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$$

ここで，関数②について

$$y = \frac{1}{3}\cos\left(\frac{2}{3}\theta + \frac{2}{9}\pi\right) = \frac{1}{3}\cos\frac{2}{3}\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$$

よって，グラフに適する関数は　②

3 [正解] エ：7

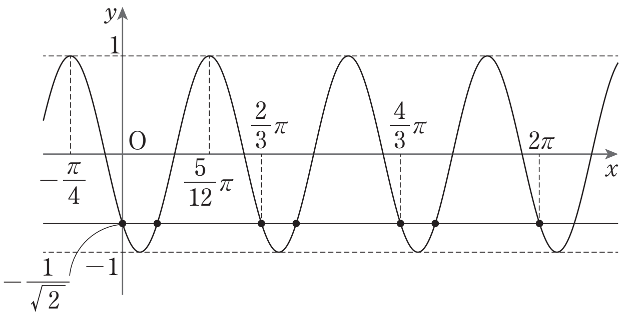
[解説]

$$f(x)=\cos\left(3x+\frac{3}{4}\pi\right)$$

とすると

$$f(x)=\cos 3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

より，$y=f(x)$ のグラフは次図のようになる。



$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ の共有点のうち，$0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲にあるものの個数が求める解の個数である。 [C]

よって　7個

[C]　t を定数とするとき，θ の方程式 $\cos\theta=t$ の解の個数は，$y=\cos\theta$ のグラフと直線 $y=t$ の共有点の個数と等しい。